Capítulo 1

Introducción.

El tema de las memorias asociativas ha estado vigente, desde hace varios lustros, dentro de algunas áreas de investigación en diversas latitudes del orbe. El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado: ésta es la característica más atractiva de las memorias asociativas.

Notables investigadores han abordado el problema de generar modelos de memorias asociativas (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961; Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969; Amari, 1972; Anderson, 1972; Kohonen, 1972; Nakano, 1972; Kohonen & Ruohonen, 1973; Kohonen, 1974; Little & Shaw, 1975; Anderson, Silverstein, Ritz & Jones, 1977; Amari, 1977; Hopfield, 1982; Hopfield, 1984; Austin, 1987; Kanerva, 1988; Kolen, & Pollack, 1991; Buhmann, 1995; Kinser, 1995; Bandyopadhyay, & Datta, 1996; Aleksander & Morton, 1997; Austin, Buckle, Kennedy, Moulds, Pack & Turner, 1997; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999), y han logrado resultados de importancia tal, que algunos de los trabajos pioneros (décadas 1970 y 1980) se han convertido en auténticos clásicos.

La capacidad de aprendizaje y almacenamiento, la eficiencia en la respuesta o recuperación de patrones, la rapidez y la inmunidad al ruido, son tópicos de interés entre los investigadores que se dedican a estudiar estos modelos con el fin de proponer variaciones y generalizaciones que, a la postre, se traduzcan en nuevos modelos de memorias asociativas con ventajas claras sobre los modelos conocidos y que, además, sean propicios para su aplicación directa en problemas reales.

Así, se han propuesto esquemas alternativos ante los clásicos (o variaciones de éstos), cuyos autores aseguran que sus modelos de memorias asociativas hacen gala de gran capacidad de almacenamiento (Chen & Honavar, 1995; Graham & Willshaw, 1995; Imada & Araki, 1995; Adeodato & Taylor, 1996; Storkey 1997; Bosch & Kurfess, 1998; Jagota, Narasimhan & Regan, 1998); exhiben más rapidez que otras (Kinser, 1995); prueban ser eficientes en cuanto a la recuperación de patrones (Hely, Willshaw & Hayes, 1997; Sommer & Palm, 1998) o se han implementado en hardware (Kennedy, Austin & Cass, 1995; Krikelis, & Weems, 1997; Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

Existen equipos de investigación que han dirigido sus esfuerzos a incorporar las bondades de las técnicas aleatorias en los esquemas para memorias asociativas (Kanerva, 1988; Browne, & Aleksander, 1996; Villanueva, & Figueroa, 1998). Las indefectibles aplicaciones de las memorias asociativas también han dado lugar a relevantes proyectos y trabajos de investigación (Herrmann, & Sodini, 1992; Schwenk & Milgram, 1995; Gori, Lastrucci & Soda 1996; Silver, Glover & Stonham, 1996; Jørgensen 1997; Hattori & Hagiwara, 2000).

En esta vorágine de aportaciones e innovaciones, la aparición, desarrollo, aplicaciones y consolidación de las memorias asociativas morfológicas representó un salto cualitativo en la concepción y desarrollo de las memorias asociativas, por las características propias de las operaciones morfológicas, que permitieron ventajas de las memorias asociativas morfológicas respecto de los modelos conocidos (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999); con objeto de proporcionar una muestra de la magnitud de este salto cualitativo, podemos mencionar que al funcionar en uno de los posibles modos (autoasociativo), las memorias asociativas morfológicas tienen respuesta perfecta y capacidad infinita de aprendizaje y almacenamiento (Díaz-de-León & Yáñez, 1999). Un hecho que puede ser importante en el contexto de las potencialidades de la tecnología de punta a niveles de seguridad nacional, es que investigadores del *Air Force Research Lab.* de los Estados Unidos implementaron las memorias asociativas morfológicas en hardware VLSI (Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

Las memorias asociativas morfológicas inspiraron la aparición de las memorias asociativas $\alpha\beta$ (alfa-beta), las cuales exhiben ventajas claras sobre las primeras, entre las que destaca una menor densidad aritmética (Yáñez, 2002; Yáñez & Díaz de León, 2003). Hoy por hoy, las memorias asociativas $\alpha\beta$ constituyen un modelo que se encuentra en la frontera del conocimiento en este importante tema.

El propósito de este capítulo es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)

2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

Respecto de las notaciones y nomenclatura que se utiliza en esta obra, en algunos casos se han realizado adaptaciones de la literatura incluida en la bibliografía, y en otros, para efectos de sencillez y facilidad de manipulación, se establecen arbitrariamente, en la inteligencia de que invariablemente se opta por aquellas notaciones que mejor reflejan, a juicio de los autores, los conceptos ahí representados. La notación y nomenclatura que aquí se presenta es consistente a lo largo de todo el libro.

Como se mencionó arriba, el propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por $\mathbf{x}$ y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por $\mathbf{y}$.

Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada: por ejemplo, los patrones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ del esquema forman la asociación $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada $\mathbf{x}^1$ le corresponderá un patrón de salida $\mathbf{y}^1$, y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa $\mathbf{M}$ se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz $\mathbf{M}$ se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu$ $\forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa* (Kohonen,1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\tilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental $\mathbf{x}^k$, y el tipo de alteración que representa $\tilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria $\mathbf{M}$ un patrón alterado $\tilde{\mathbf{x}}^{\omega}$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, ..., p\}$). $\mathbf{M}$ responde con el correspondiente patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^{\omega}$, se dice que la recuperación es *perfecta*. Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados: por ejemplo, si $\mathbf{y}^3$ es un patrón fundamental, entonces $\tilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de $\mathbf{y}^3$.

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz $\mathbf{M}$.

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B. La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componenetes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz $\mathbf{M}$ serán elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$. donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.
- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B, es necesario establecer las dimensiones de los patrones. tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada. y por m la dimensión de los patrones de salida:

claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, ..., n\}$ o $j \in \{1, 2, ..., m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna $\mathbf{x}^\mu$ se representa por

$$x_j^\mu$$

Ejemplos:

- La i-ésima componente del vector columna $\mathbf{x}^\mu$ se representa por x_i^μ
- La tercera componente del vector columna $\mathbf{x}^5$ se representa por x_3^5
- La j-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^\mu$ se representa por y_j^μ
- La l-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^\omega$ se representa por y_l^ω

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^{\mu} = (y_1^{\mu}, y_2^{\mu}, ..., y_m^{\mu})^t = \begin{pmatrix} y_1^{\mu} \\ y_2^{\mu} \\ \vdots \\ y_m^{\mu} \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del *problema general de las memorias asociativas*:

1. Fase de aprendizaje. Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz M que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), ..., (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^{\mu} \in A^n$ y $\mathbf{y}^{\mu} \in A^m$ $\forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ tal que $\mathbf{x}^{\mu} \neq \mathbf{y}^{\mu}$, la memoria será *heteroasociativa*; si $m = n$ y $\mathbf{x}^{\mu} = \mathbf{y}^{\mu}$ $\forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, la memoria será *autoasociativa*.

2. Fase de recuperación. Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^{\mu}$, cuando se opera la memoria M con el patrón fundamental de entrada $\mathbf{x}^{\mu}$; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada $\widetilde{\mathbf{x}}^{\omega}$, para entregar una salida perfecta $\mathbf{y}^{\omega}$.